EJERCICIO 1

Un cuerpo elástico se encuentra sometido a un estado tensional caracterizado por el campo tensorial $\mathbf{T}(\vec{r})$, que particularizado para un punto del sólido y en una base ortonormal $\{\vec{e}_i\}$ tiene la siguiente expresión:

$$\underline{\underline{\mathbf{T}}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

a) Calcular las tensiones y direcciones principales del tensor $\underline{\underline{\mathbf{T}}}$.

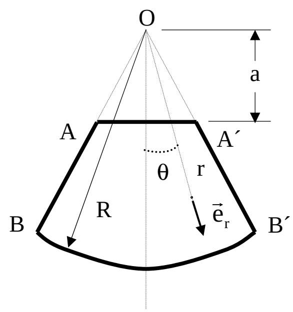
b) Determinar la traza y el determinante del tensor $\underline{\underline{\mathbf{T}}}$ a partir de las componentes en la base $\{\vec{e}_i\}$ y comprobar que se obtienen los mismos valores utilizando los resultados del apartado a).

EJERCICIO 2

El campo de tensiones del sólido de la figura viene dado por el tensor $\underline{\underline{\sigma}}$, cuya única componente no nula es la que se transmite en la dirección radial:

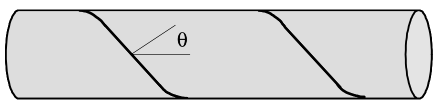
$$\sigma_r = \frac{A}{r}\cos\theta$$

donde A es una constante y r, θ y $\vec{e}_r$ tienen el significado indicado en la figura. Determinar las fuerzas de contacto, las fuerzas de acción a distancia que actúan sobre el sólido y la resultante de las fuerzas que actúan sobre las caras del sólido.



EJERCICIO 3

Un recipiente cilíndrico a presión se fabrica enrollando sobre un mandril una placa de acero larga y de pequeño espesor, que se suelda a lo largo de los bordes hasta formar una junta helicoidal. Suponiendo que la tensión normal admisible en la soldadura es el 80% de la tensión normal admisible en el material, determinar qué ángulos debe formar la dirección normal a la junta helicoidal con el eje del cilindro para que la unión no debilite el recipiente.



EJERCICIO 4

El plano *3x + 4y - 1 = 0* es de simetría en un sólido, y la tensión transmitida en el punto P de dicho plano es de tracción con módulo *4a*. Donde *a* es una constante desconocida expresada en MPa y *{x, y, z}* es un sistema de referencia cartesiano. Además, en el plano normal al vector $\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\vec{\imath} + \vec{\jmath} + \vec{k})$, que también contiene al punto P, se transmite la tensión $\vec{t} = a\vec{\imath} + 3\vec{\jmath}$. Sabiendo que todas las posibles tensiones que actúan en el punto P están contenidas en el plano *xy*, determine el tensor de tensiones en el punto P.

Indicación:
Si $\bar{\bar{\sigma}}$ es el tensor de tensiones y $\vec{n} = n_x\vec{\imath} + n_y\vec{\jmath} + n_z\vec{k}$ un vector unitario, se cumple que:
$\bar{\bar{\sigma}}\vec{n} = n_x\bar{\bar{\sigma}}\,\vec{\imath} + n_y\bar{\bar{\sigma}}\,\vec{\jmath} + n_z\overrightarrow{\bar{\bar{\sigma}}\,k}$.

EJERCICIO 5
Un recipiente esférico y un tramo de tubería cilíndrica de radio interior R_i, radio exterior R_e y espesor e se encuentran sometidos a presión interior. Los tensores de deformación correspondientes a cada sólido son los siguientes:

$$\textit{ESFERA} \qquad \varepsilon_r = \left(-\frac{2\mathrm{A}}{\mathrm{r}^3} + \mathrm{B}\right) \qquad \varepsilon_\theta = \varepsilon_\varphi = \left(\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{r}^3} + \mathrm{B}\right) \qquad \{\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi\}$$

$$\textit{TUBO} \qquad \varepsilon_r = \left(\frac{C}{r^2} + D\right) \qquad \varepsilon_\theta = \left(-\frac{C}{r^2} + D\right) \qquad \varepsilon_z = E \qquad \{\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z\}$$

Determinar las variaciones relativas del espesor y del radio exterior siendo A, B, C, D y E constantes.

EJERCICIO 6
El campo de desplazamientos de un sólido está descrito en coordenadas cartesianas por el siguiente campo vectorial:
$u = k(2x + y^2)$
$v = k(x^2 - 3y^2)$
$w = 0$
donde u, v y w son las componentes cartesianas del vector desplazamiento. Determinar las deformaciones principales y la máxima deformación angular que se produce en el punto de coordenadas (1,1,1).

EJERCICIO 7
Sobre la placa cuadrada mostrada en la figura a) se aplica una solicitación de tal forma que adquiere la forma de la figura b), donde α es una constante adimensional conocida y de pequeño valor. Determine el cambio de longitud del arco de circunferencia marcado en la figura a) sabiendo que la placa sólo se deforma en el plano *xy* y que los desplazamientos varían linealmente con las coordenadas de posición.

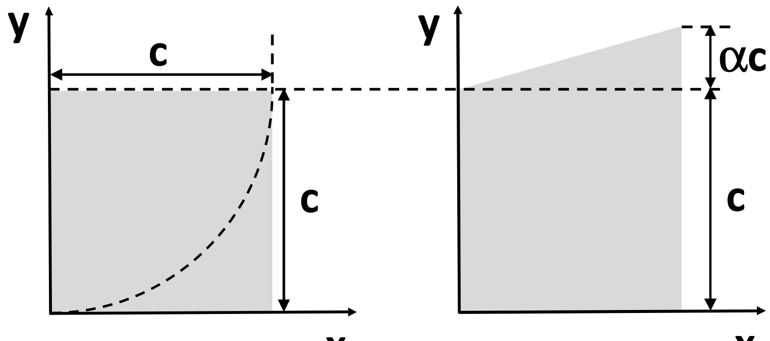
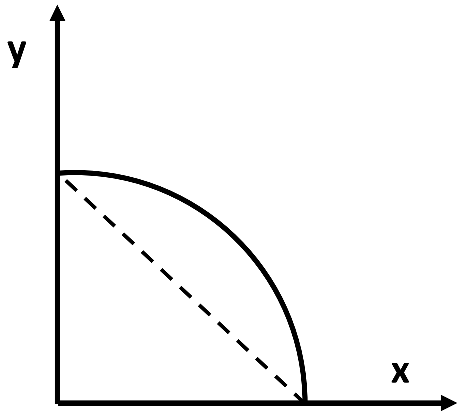


Figura a) Figura b)

EJERCICIO 8

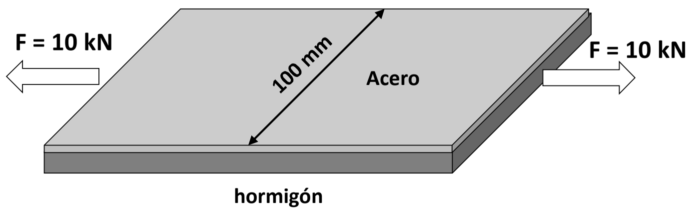
El cuarto de disco de la figura de radio *R*, está sometido a un sistema de fuerzas tal que experimenta el campo de desplazamientos $\vec{u} = \alpha(xy\vec{\imath} + y^2\vec{\jmath})$, donde α es una constante conocida. Determine:

a) El cambio de área del disco en el plano XY.
b) El cambio de longitud de la línea discontinua indicada en la figura.



EJERCICIO 9

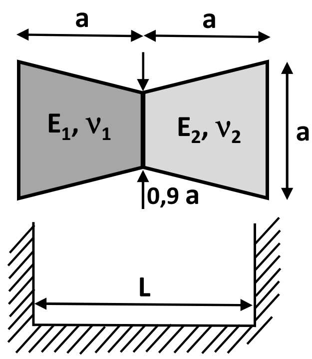
Una placa delgada de 100 mm de ancho está formada por una lámina inferior de hormigón de 10 mm de espesor y por una lámina superior de acero de 1 mm de espesor, unidas entre sí. La placa se ha fabricado deformando ambas capas para que la de acero resulte traccionada y la de hormigón comprimida, ambas en su dirección longitudinal. Cuando la placa se pone en servicio, sufre una fuerza de 10 kN aplicada en su dirección longitudinal. Considerando que la fuerza se distribuye homogéneamente en la sección transversal de la placa, determine el mínimo valor de tensión al que debería pretensarse la lámina de acero durante la fabricación, para que el hormigón trabaje en compresión en las condiciones de servicio.



Datos:
Módulo elástico del acero: 210 GPa
Módulo elástico del hormigón: 35 GPa.

EJERCICIO 10

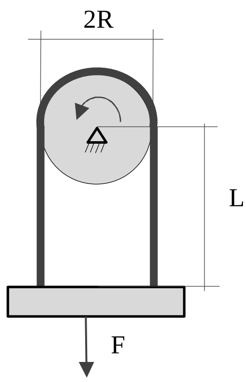
Dos bloques troncocónicos elásticos y lineales tienen las dimensiones y propiedades indicadas en la figura. Con sus bases de menor sección en contacto, se encajan dentro de una cavidad rígida y lisa cuyo ancho *L* es ligeramente más pequeño que *2a*. Una vez que los bloques están alojados en el interior de la cavidad, determinar:



a) Las tensiones que ejercen las paredes de la cavidad sobre las bases de los bloques.
b) La variación de longitud de cada bloque.

EJERCICIO 11

Un tambor cilíndrico de radio *R*, gira accionado por un motor en torno a su eje, que está fijo y sustentado externamente. Una correa elástica rodea la mitad superior del tambor y se conecta por ambos extremos a una placa rígida situada a una distancia *L* del centro del tambor, como indica la figura. Determinar el valor de la fuerza *F* que es necesario aplicar a la placa para que descienda un distancia δ sin perder su posición horizontal.



<u>*Datos:*</u>
Coeficiente de rozamiento entre la correa y el tambor, μ.
Rigidez a tracción de la correa, EA.

EJERCICIO 12

El álabe de una turbina puede asimilarse a una barra de longitud uniforme L que gira en un plano alrededor de uno de sus extremos con velocidad angular constante ω. ¿Qué alargamiento experimenta por efecto del giro, si está fabricada con material elástico de densidad ρ y módulo de elasticidad E?.

EJERCICIO 13

Una placa rectangular con un orificio circular de radio R, está sometida a una tensión remota Un sólido semiesférico de radio interior R/2 y radio exterior R se encuentra sometido a una presión de valor p en su contorno exterior y a una presión interior desconocida. Además, permanece en equilibrio sin necesidad de aplicar ninguna fuerza de acción a distancia. En esas condiciones el tensor de tensiones que se desarrolla en cada punto del sólido, expresado en las coordenadas esféricas habituales es:

$$\bar{\bar{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_r(r) & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{C\sigma_r(r)}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{C\sigma_r(r)}{2} \end{pmatrix}$$

Donde la tensión radial depende de la coordenada radial r y C es una constante desconocida. Determine:

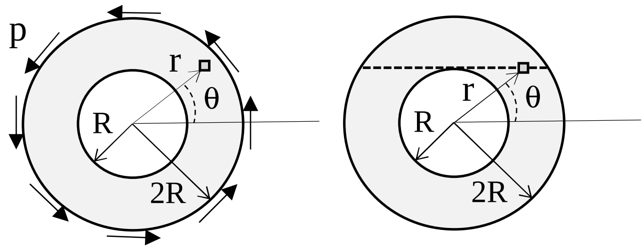
a) La tensión radial σr en función de la constante C.

b) El valor de C que produce la mayor tensión cortante en el sólido.

EJERCICIO 14

Un anillo delgado de radio interior *R* y radio exterior *2R,* fabricado con material elástico lineal de constantes *E* y ν, permanece en equilibrio cuando se somete en todo su contorno exterior a una tensión tangencial *p*, como indica la figura. En estas condiciones, puede suponerse que el estado tensional toma la forma

$$\underline{\underline{\sigma}}^{\{r,\theta,z\}} = \begin{pmatrix} 0 & \tau(r) & 0 \\ \tau(r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



donde r, θ, z son las coordenadas cilíndricas habituales y *τ(r)* es una función desconocida dependiente únicamente de la coordenada radial. Determinar:

i) Las fuerzas de contacto en el contorno interior del anillo.
ii) El cambio de longitud de la cuerda de la circunferencia exterior que es tangente a la circunferencia interior.

EJERCICIO 15

Una cuña se ha construido cortando un tubo de material elástico y lineal (constantes E y ν) de radio interior a, radio exterior b y longitud L de manera que la cuña supone una cuarta parte del tubo. A la cuña se le somete a un estado tensional uniaxial en la dirección de su eje longitudinal de tal manera, que al deformarse, almacena energía elástica según la función de densidad siguiente:

$$\omega(r,\theta,z) = \alpha^2 E \frac{sen^2\theta z^2}{r^4}$$

Donde r, θ y z son las coordenadas cilíndricas habituales y α es una constante con dimensiones de longitud. Determine:

a) La variación de volumen de la cuña.
b) Las fuerzas exteriores que deben actuar sobre el sólido para que se encuentre en equilibrio.

EJERCICIO 16

Un anillo delgado de material elástico y lineal de constantes E y ν, con radio exterior R, y radio interior $\frac{R}{2}$, se somete al siguiente estado tensional:

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_r(r) & 0 \\ 0 & \sigma_\theta(r) \end{pmatrix}; \; con \;\; \sigma_r(r) = -\sigma_0 \left(\frac{r}{R}\right)^2$$

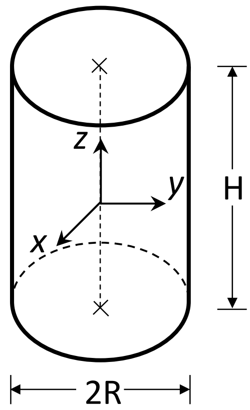
donde σ_0 es una constante desconocida con dimensiones de tensión y r y θ son las coordenadas radial y circunferencial del anillo, respectivamente. Determinar:

a) la componente σ_θ del tensor de tensiones, en función de σ_0, sabiendo que sólo depende de *r* y que, en las condiciones descritas, el anillo se encuentra en equilibrio sin que sobre él actúen fuerzas de acción a distancia.
b) las fuerzas de contacto ejercidas sobre el anillo para que su área varíe una cantidad δ.

EJERCICIO 17

El campo de desplazamientos de una pieza cilíndrica de radio R y altura H viene dado por las siguientes expresiones:

$$u_x = -kyz \qquad u_y = +kxz \qquad u_z = 0$$



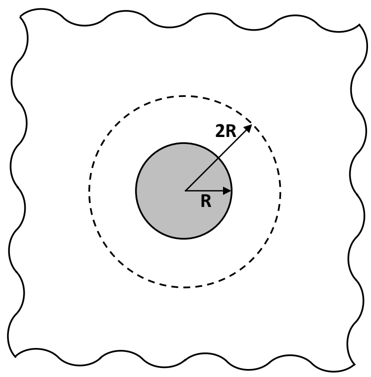
donde x, y y z son las coordenadas cartesianas correspondientes a los ejes de la figura. Determinar:

a) El tensor de deformaciones, las deformaciones principales y la deformación volumétrica.
b) Las deformaciones angulares máximas.
c) La resultante de las fuerzas y momentos actuando sobre la cara superior.
d) La energía de deformación almacenada en toda la pieza.

Datos: Módulo de elasticidad, E, coeficiente de Poisson, ν

EJERCICIO 18

Un disco de radio R, delgado, homogéneo y de material elástico y lineal, se encuentra encajado perfectamente en un macizo elástico infinito como muestra la figura. Determine la variación de radio que experimentará la circunferencia de radio 2R si el conjunto se somete a un calentamiento ΔT.



Estado tensional de un macizo elástico con un orificio circular de radio R, sometido a presión interior p.

$$\sigma_r = -\frac{R^2}{r^2} p \qquad \sigma_\theta = \frac{R^2}{r^2} p$$

donde *r* y θ son las coordenadas polares tomando como origen el centro del orificio.

Datos del macizo: módulo de elasticidad E, coeficiente de Poisson ν y coeficiente de dilatación térmica α.
Datos del disco: módulo de elasticidad 2E, coeficiente de Poisson ν y coeficiente de dilatación térmica 3α.

EJERCICIO 19

Un disco de radio R y espesor constante e, mucho menor que R, gira en torno a su eje con velocidad angular constante ω. Determinar: i) la velocidad de giro límite para que las tensiones tangenciales no superen la mitad del límite elastico del material; ii) el enfriamiento del disco ΔT necesario para que al girar con la velocidad angular determinada en el apartado i) el radio del disco permanezca constante.

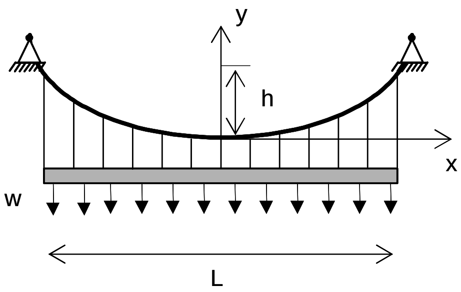
Propiedades del material: densidad ρ, módulo de elasticidad E, coeficiente de Poisson ν, límite elástico Y, coeficiente de dilatación térmica lineal α.

Tensiones en un punto de coordenada radial r en un disco de radio R que gira a velocidad angular ω:

$$\sigma_r = \frac{3+\nu}{8}\rho\omega^2\left(R^2 - r^2\right) \qquad \sigma_\theta = \frac{3+\nu}{8}\rho\omega^2 R^2 - \frac{1+3\nu}{8}\rho\omega^2 r^2$$

EJERCICIO 20

Los cables principales de un puente colgante, de peso despreciable frente al peso de la cubierta, describen una curva parabólica que responde a la ecuación $y = \dfrac{wx^2}{2T_0}$, donde los ejes x e y se esquematizan en la figura, w es el peso por unidad de longitud de la cubierta del puente y T_0 la fuerza de tracción que actúa sobre el cable en su punto más bajo. Determinar:

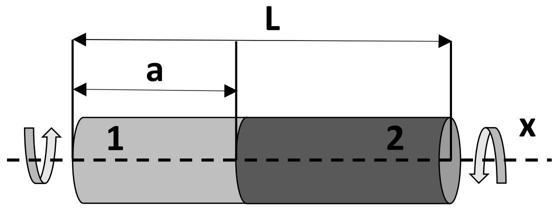


i) el valor de la fuerza T_0 en función de la luz, L, y de la flecha, h, del cable
ii) el valor de la fuerza en cualquier punto del cable
iii) el alargamiento total, ΔS, experimentado por el cable como consecuencia del peso de la cubierta.

Rigidez del cable a tracción: EA

EJERCICIO 21

El eje cilíndrico de radio R y longitud L de la figura está compuesto por dos materiales, unidos perfectamente entre sí, y sometido al momento torsor variable indicado (siendo el origen del eje x la base izquierda).



$$M_T = M_0 sen\left(\pi \frac{x}{L}\right)$$

a) Calcule el valor de a para que el ángulo total de giro sea el 40% del que se obtendría en un eje con las mismas dimensiones, fabricado únicamente con el material 1, y sometido a un momento torsor constante M_0.

b) Para el valor de a calculado anteriormente, determine qué material fallará primero en el eje compuesto.

<u>*Datos*</u>:

Material 1: Módulo de elasticidad transversal G, tensión cortante admisible 0.9τ

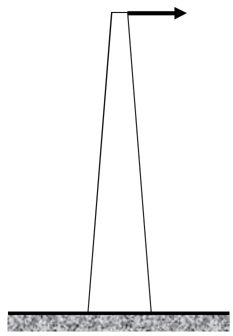
Material 2: Módulo de elasticidad transversal 2G, tensión cortante admisible τ.

EJERCICIO 22

Un eje de sección circular sufre una ley de momentos torsores $M = M_0\left(1+\frac{z}{L}\right)$, donde z representa la coordenada longitudinal de la barra y L es su longitud. La geometría de la barra se ha diseñado para que en todas las secciones, la tensión cortante en el contorno exterior de la barra alcance un mismo valor τ. Determine el giro relativo que se produce entre las secciones extremas del eje sabiendo que el módulo de elasticidad transversal es G.

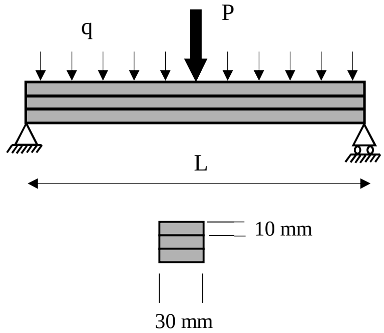
EJERCICIO 23

El palo de una bandera es un cilindro macizo de 10 m de altura, empotrado en su base y cuyo radio varía uniformemente desde 60 mm a ras de suelo hasta 30 mm en el extremo superior. El efecto del viento sobre la bandera se considera equivalente a una fuerza horizontal de 300 N aplicada en el extremo superior. Determinar la máxima tensión normal generada a lo largo del mástil.



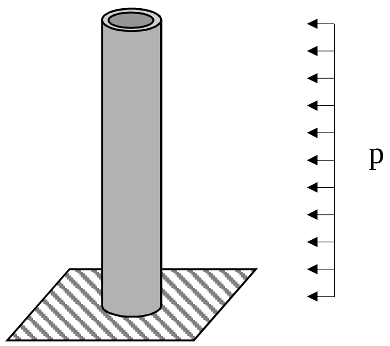
EJERCICIO 24

Una viga de plástico laminado con sección transversal cuadrada está construida con tres tiras pegadas, cada una de 10 mm X 30 mm en sección transversal. La viga tiene un peso total de 3,2 N y está simplemente apoyada como indica la figura con una luz L = 320 mm. Suponiendo que el peso de la viga puede considerarse una carga uniformemente repartida, determinar la máxima fuerza P que puede aplicarse en el centro de la viga si: a) la tensión tangencial admisible en las juntas pegadas es de 0,3 MPa y b) la tensión normal admisible en el plástico es de 8 MPa.



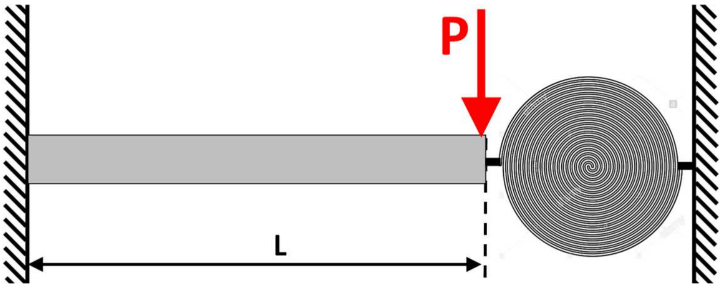
EJERCICIO 25

Una chimenea cilíndrica de ladrillos de altura H, diámetro interior d_1, diámetro exterior d_2 y peso por unidad de longitud w, está empotrada en su base y sometida a una carga lateral uniformemente distribuida de valor p por unidad de longitud, que simula la acción del viento. Determinar la máxima altura de la chimenea para que no se generen tensiones de tracción en la mampostería.



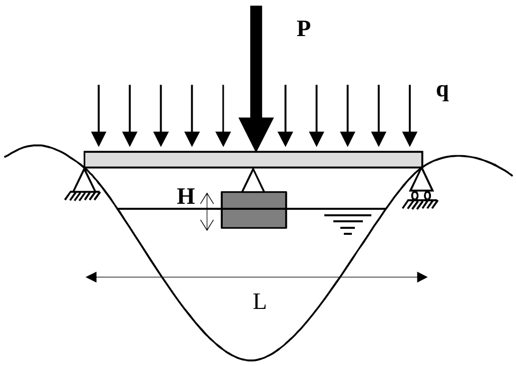
EJERCICIO 26

Una barra delgada de material elástico y lineal se encuentra empotrada en un extremo y unida a un muelle helicoidal con rigidez k en el otro. Determine el mayor valor de la carga P que puede aplicarse en el extremo de la barra para que la tensión normal no supere en ninguna sección de la barra la tensión admisible σ_{adm}.



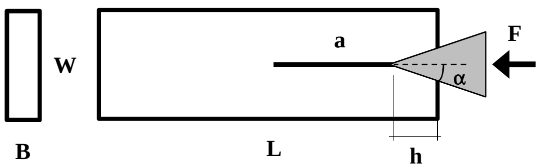
Indicación:
Un muelle helicoidal es un apoyo elástico que establece una relación proporcional entre el momento generado en el muelle, M, y el giro producido, θ, del tipo M=kθ, donde k es la constante de rigidez del muelle.

EJERCICIO 27
El tablero de un puente construido de manera provisional para salvar un río puede considerarse una viga simplemente apoyada a la que se ha añadido un apoyo flotante en su punto medio. El apoyo flotante es prismático con una sección A y ha sido diseñado de manera que por la acción de su propio peso se sumerge un 10% de su altura H. Sabiendo que el peso del tablero por unidad de longitud es q, determinar la máxima carga puntual P, que puede aplicarse al tablero en su punto central para que el apoyo flotante no se sumerja completamente.



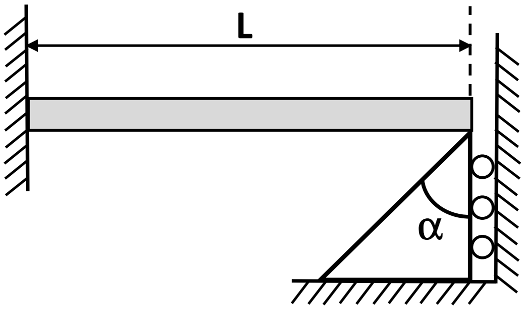
Datos: longitud del tablero L, rigidez a flexión EI, densidad del agua ρ, aceleración de la gravedad g.

EJERCICIO 28
En una pieza prismática de altura *L*, anchura *W* y espesor *B* se practica un corte de profundidad *a* que divide la pieza en dos partes iguales. Para abrir el corte se introduce una cuña rígida de semiángulo α. Determinar la fuerza *F* necesaria para introducir la cuña una distancia *h* en la pieza prismática. Despréciese todo rozamiento y considérese que la acción de la cuña se transmite como una fuerza puntual en el extremo libre.
<u>Datos</u>:
Módulo de elasticidad de la cuña, E.
Momento de inercia de una sección rectangular de base b y altura h, $I = \frac{1}{12} bh^3$



EJERCICIO 29

La figura muestra una viga empotrada cuyo extremo libre se apoya sobre la cúspide de una cuña rígida triangular que puede desplazarse verticalmente. Determine el coeficiente de seguridad frente al fallo por compresión en la viga cuando la cuña asciende *5 mm*.

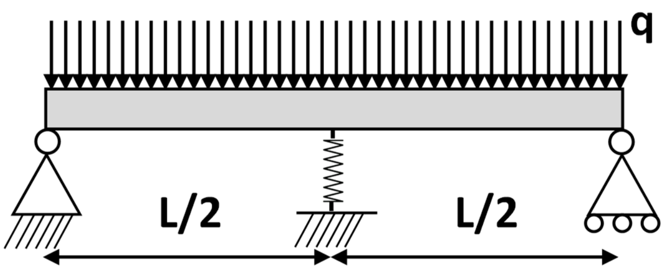


Datos:

$\alpha=\pi/4$, L=1 m, E=200 GPa, Límite elástico en compresión 365 MPa, la viga tiene un perfil IPE180. Asuma que las superficies de los sólidos en contacto son lisas y considere que la viga no puede fallar por pandeo.

EJERCICIO 30

La barra de la figura se apoya en sus extremos mediante los apoyos articulados indicados. Además, la sección central se apoya en un muelle elástico de rigidez K = 105 N mm-1. Sabiendo que la barra mide L = 3 m, que tiene un perfil IPE200 con módulo de elasticidad E = 200 GPa, y que soporta una carga uniformemente distribuida en toda su longitud q= 100 N mm-1, determine:



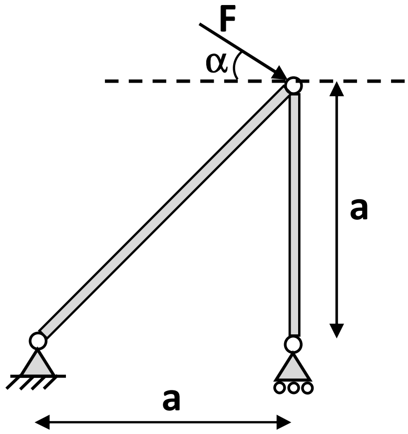
a) El valor de las reacciones en todos los apoyos.

b) El coeficiente de seguridad en la barra si el límite elástico del material es de 250 MPa.

EJERCICIO 31

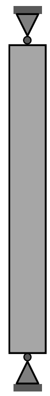
Una sustentación de apoyo, empleada durante la ejecución de obra de un edificio, puede entenderse como una estructura articulada de dos barras simplemente apoyadas. La estructura se instala de manera que la carga puntual *F* que soporta siempre sea la misma y se aplique en el nodo de unión entre las dos barras. Sin embargo, dependiendo de la situación de apoyo particular, la dirección de la carga puede variar. Este problema puede esquematizarse como indica la figura, teniendo en cuenta que el ángulo α puede cambiar entre 0 y 90º. Sabiendo que las dos barras son cilíndricas con módulo de elasticidad *E*, dimensiónelas para que no se produzca el fallo en ninguna de ellas.

Datos: Tensión normal admisible del material *Y*.



EJERCICIO 32

Para medir la resistencia a compresión de un material se utiliza una placa de longitud L, anchura W y espesor t. El dispositivo de ensayo mantiene articulados los extremos de la placa como indica la figura. Determinar el número mínimo de apoyos intermedios que es necesario introducir para garantizar que se alcanza la resistencia a compresión del material de la placa sin que se produzca pandeo. Considérese solamente el caso de apoyos separados por distancias $\frac{L}{n}$ siendo n un número entero.



<u>Datos</u>:
Módulo de elasticidad: E
Resistencia a compresión: σ_c